1 문제

양수 a와 두 실수 b, c에 대하여 함수

$$f(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$$

은 다음 조건을 만족시킨다

(가) $f(x)$는 $x = -\sqrt{3}$과 $x = \sqrt{3}$에서 극값을 갖는다
(나) $0 \le x_1 < x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_2) - f(x_1) + x_2 - x_1 \ge 0$

세 수 $a,\ b,\ c$의 곱 abc의 최댓값을 $\dfrac{k}{e^3}$라 할 때, $60k$의 값을 구하시오. [4점]

2 정답

15

3 해설

(가) 에서

$f'(x) = (ax^2 + (2a+b)x + b + c)e^x = 0$

의 근이 $-\sqrt{3},\ \sqrt{3}$이므로 근과 계수와의 관계에 의하여 $-\dfrac{2a+b}{a} = 0,\ \dfrac{b+c}{a} = -3$

$\therefore\ b = -2a,\ c = -a$

$\therefore\ f'(x) = a(x^2 - 3)e^x$

(나) 에서 $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \ge -1$

$\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(x)\ (0 \le x_1 < x < x_2)$을 만족하는 x가 존재하므로 ($\because$ 평균값의 정리)

$f'(x) \ge -1\ (x > 0)$

$f''(x) = a(x+3)(x-1)e^x$이므로

$f'(x)$는 $x = 1$에서 최솟값 $f'(1) = -2ae$를 가진다.

$-2ae \ge -1,\ a \le \dfrac{1}{2e}$

$\therefore\ abc = a(-2a)(-a) = 2a^3 \le \dfrac{1}{4e^3}$

$\therefore\ k = \dfrac{1}{4},\ 60k = 15$

(참고) $g(x) = f(x) + x$ 라 하면 조건 (나) 에서

$g(x_2) \ge g(x_1)$이므로 $g(x)$는 증가함수이다.

$\therefore\ g'(x) \ge 0$, 즉 $f'(x) \ge -1$